

Estrategia para el control estadístico de calidad de un proceso multivariado

Catalano Mara Lis, Dillon Figueroa Justina y Re Juan Pablo

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario.

Contacto: catalano@fceia.unr.edu.ar
justina.dillon.figueroa@gmail.com
juampire.96@gmail.com



RESUMEN

La calidad de un producto se puede medir por medio de alguna variable de interés, que es el resultado de un proceso que está determinado por variables de entrada. Por lo tanto, son éstas últimas las que van a definir el comportamiento de la variable de interés. Es así, que el control estadístico de la calidad se puede focalizar en esas variables de entrada, muchas veces relacionadas entre sí. En este contexto, las herramientas univariadas resultan insuficientes. Al tener en cuenta lo enunciado, surgen ciertas preguntas: ¿cuáles variables de entrada tienen mayor impacto en el producto final?, ¿cómo controlar conjuntamente las variables con mayor impacto?, ¿cómo saber qué variables son las responsables de las muestras fuera de control? En este trabajo se busca respuestas para un determinado escenario articulando distintas técnicas estadísticas multivariadas. Como resultado se diseña una estrategia que sirve de guía para la aplicación práctica en cualquier empresa.

ABSTRACT

The quality of a product can be measured by means of some variable of interest, which is the result of a process that is determined by input variables. Therefore, it is the latter that will define the behavior of the variable of interest. Thus, statistical quality control can focus on these input variables, many times related to each other. In this context, univariate tools are insufficient. Taking into account the afore mentioned, certain questions arise: which input variables have the greatest impact on the final product? How to jointly control the variables with the greatest impact? How to know which variables are responsible for out-of-control samples? In this work, answers are searched for a certain scenario by articulating different multivariate statistical techniques. As a result, a strategy is designed that serves as a guide for practical application in any company.

INTRODUCCIÓN

En la industria 4.0, la calidad de los productos y de los procesos es un factor decisivo que en gran medida define qué empresas compiten en el mercado y cuáles quedan afuera. Es debido a esto que las empresas abocan recursos para controlar y mejorar la calidad del producto final que ofrecen a los clientes, como también de todos sus procesos internos [1].

En este sentido, el control estadístico de la calidad juega un rol fundamental para lograr este objetivo ya que provee de estrategias para el análisis de datos atendiendo sus características [2].

Por ejemplo, si se considera un proceso de extrusión de una película plástica que se utiliza para la elaboración de bolsas plásticas de polietileno de alta densidad, la variable de interés de la película podría ser la resistencia al rasgado. Un enfoque común en el control de calidad es monitorear la resistencia mediante una inspección donde se toma una muestra del lote producido. Si los valores que toma la variable en la muestra están dentro de especificaciones, el lote se aprueba. En caso contrario, se puede rechazar el lote completo, tomar otra muestra o bien realizar una inspección del 100%. En cualquiera de estos casos, se incurre en mayores desperdicios. Otro enfoque se basa en considerar que la variable de interés o de salida es el resultado de un proceso, en el cual hay muchos factores que interactúan entre sí e influyen en la misma. Por lo tanto, estos factores, denominados variables de entrada, son las que van a definir el comportamiento de la variable de salida. Es por esto, que para controlar la calidad del proceso y obtener una variable de salida bajo control, es necesario monitorear las variables de entrada. Por ejemplo, una extrusora es una máquina que tiene muchas variables de entrada, como ser las temperaturas de las distintas resistencias a lo largo de la misma, la temperatura del cabezal, la velocidad del motor, el caudal de extrusión, entre otras. Adicionalmente, el proceso de extrusión tiene fuentes de variabilidad que no son totalmente controlables como ser la calidad de los pellets del proveedor, alguna rotura en la extrusora o mal funcionamiento.

Otro ejemplo, puede ser el despacho de pedidos de un depósito. La variable de salida de dicho proceso podría ser la satisfacción del cliente y considerar que las variables que impactan sobre la misma son el tiempo transcurrido desde la orden de despacho y la llegada del producto al cliente, el tiempo desde la última orden entregada al cliente en mal estado, el tiempo desde la última orden entregada al cliente en cantidades distintas a las pedidas, el costo de la entrega, el costo de la gestión del depósito o el costo de preparación de los

pedidos, entre otras.

Con el avance de la tecnología y el desarrollo de instrumentos de medición más sofisticados, en la actualidad las empresas pueden disponer de datos sobre muchas variables [3]. No todas las variables que actúan en el proceso tienen la misma relevancia con respecto a la característica de calidad que se quiere estudiar. Por esto, una adecuada selección de las variables que influyen en la característica objetivo es importante. Una vez establecidas las variables críticas del proceso, se utilizan para implementar un control del mismo.

En estos contextos donde hay múltiples variables relacionadas entre sí, las herramientas de control univariado resultan insuficientes por lo que hay que recurrir a técnicas que contemplen la naturaleza multivariada de las variables para un análisis conjunto de las mismas. Montgomery [4] comenta que aplicar un enfoque univariado a procesos donde las variables están correlacionadas distorsiona la variabilidad del proceso y, por lo tanto, la validez del control de calidad que se está llevando a cabo.

Una herramienta muy difundida para el control estadístico de la calidad son los gráficos de control, los cuales permiten detectar situaciones atípicas en un proceso de manera casi instantánea o con poco retraso en el tiempo. En las últimas décadas, con el avance y la disponibilidad de los softwares estadísticos, los gráficos de control multivariados cada vez toman más auge.

Un inconveniente surge cuando se quiere saber cuál es la variable responsable de uno o varios puntos fuera de control ya que a simple vista no se puede determinar. Para esto, se presenta una alternativa que estudia la contribución de las variables a esos puntos en base en el análisis de componentes principales [5]. Esto permite establecer sobre qué variables hay que actuar para que el proceso se mantenga bajo control.

En este trabajo se presenta una estrategia que articula distintas técnicas estadísticas multivariadas para el tratamiento de las situaciones mencionadas. Se aplica a datos para mostrar su uso.

METODOLOGÍA

Se supone que se quiere estudiar la calidad de un producto a partir de una variable de interés o de salida continua cuyo valor es consecuencia de muchos factores del proceso (variables de entrada, también continuas) que varían y se relacionan entre sí. Por lo tanto, son éstas últimas las que van a definir el comportamiento de la variable de salida. Es así, que el control estadístico de la calidad se puede focalizar en esas variables de entrada. Para esta situación se diseña una estrategia para el control de calidad del producto articulando dis-

tintas técnicas estadísticas multivariadas, la cual consta de tres pasos.

Identificación de las variables de entrada que influyen en la variable de salida

No todas las variables de entrada del proceso son igualmente importantes en la calidad de un bien o servicio. En consecuencia, monitorearlas a todas no resulta eficiente [6] e incluso a veces es imposible. Por lo tanto, se debe encontrar las variables de entrada críticas que influyan en la variable de salida. En general, el personal con experiencia en el proceso tiene una idea de qué variables de entrada se necesitan mantener estables para lograr que la variable de interés también se comporte de manera estable. Para formalizar esta identificación se puede utilizar el análisis de regresión.

En el caso que la variable de salida se pueda escribir como una aproximación de una combinación lineal de las variables de entradas se puede ajustar un modelo de regresión lineal múltiple [7], [8].

La ecuación de este modelo está dada por

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_p X_{pi} + \varepsilon_i \quad (1)$$

donde y_i es el valor de la variable respuesta o de salida de la unidad i ; X_{1i}, \dots, X_{pi} son los respectivos valores de las variables regresoras o de entrada de la unidad i , β_0, \dots, β_p son los coeficientes de regresión y ε_i es el error aleatorio de la unidad i .

Se supone que,

$$\varepsilon_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

Los supuestos se evalúan mediante un análisis de residuos.

Las variables regresoras que resulten estadísticamente significativas son las que se consideran variables de entrada críticas.

Control de calidad de las variables de entrada críticas

Una de las principales herramientas estadísticas utilizadas para el estudio, control y mejora de los procesos productivos o servicios son los gráficos de control. Estos fueron ideados por Shewhart en 1924 y su función es evaluar el comportamiento de una variable a lo largo del tiempo a través de sus parámetros distribucionales. Estos gráficos permiten identificar (con un cierto riesgo) si el proceso se comporta de forma estable o no en el tiempo. En el primer caso, se dice que "el proceso está bajo control estadístico", ya que las causas que actúan en el mismo son parte la variabilidad del proceso, es decir, son causas inherentes al proceso, que apare-

cen y desaparecen de forma aleatoria, produciendo una variabilidad regular que se puede disminuir, pero no eliminar. Su comportamiento regular a través del tiempo y el hecho de que los efectos sean pronosticables permiten un buen control del proceso. Mientras que, en el segundo caso, se considera que "el proceso está fuera de control estadístico" y existen causas llamadas asignables que perturban el comportamiento normal del proceso. Se denominan asignables porque son originadas por motivos concretos, sean conocidos o no. Su comportamiento es irregular e inestable en el tiempo, por lo que resultan imprevisibles. Son causas extrañas al proceso que producen grandes variaciones. Sus efectos perduran hasta que son eliminadas [9].

Hay dos inconvenientes a la hora de utilizar gráficos univariados para el control multivariado. Primero, puede haber unidades atípicas que los gráficos de control univariados no detecten. Segundo, si las variables no son independientes es difícil tener una medida de cuál es la probabilidad de error tipo I [10].

Supóngase que se tiene p variables de entrada continuas X_1, X_2, \dots, X_p con función de densidad normal multivariada:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}, \mathbf{x} \in \sim^p \quad (3)$$

donde $\mathbf{x} = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ es el vector de los valores de las p variables, $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]$ es el vector de medias y Σ es la matriz de variancias y covariancias de las p variables.

En este caso, los parámetros distribucionales que se monitorean a partir de gráficos de control son $\boldsymbol{\mu}$ y Σ [11].

Gráfico de control de T^2

Este gráfico de control es análogo al gráfico de control \bar{x} o I univariado de Shewhart. Existen dos versiones del gráfico T^2 de Hotelling [12]: una para datos agrupados y otra para observaciones individuales [13], [14].

La estadística involucrada tiene en cuenta que la distancia estandarizada al cuadrado de \mathbf{x} a $\boldsymbol{\mu}$ está dada por $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$.

En el caso en que las m muestras tomadas sean de tamaño uno y se tenga estimaciones de los parámetros de la distribución de las variables de entrada, la estadística que se grafica es

$$T^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

donde $\bar{\mathbf{x}}$ es vector de las medias muestrales y S es la matriz de variancias y covariancias muestra-

les de las p variables calculadas a partir de las m muestras.

Los límites de control superior (LCS) e inferior (LCI) para Fase 2 son

$$LCS = \frac{p(m+1)(m-1)}{m-mp} F_{\alpha, p, m-p}$$

y LCI=0, siendo F la distribución F de Snedecor.

Gráfico de control de la variancia generalizada

Como en el caso univariado, es importante controlar no sólo la media, sino también la variancia. La variancia de un proceso multivariado está resumida en la matriz de variancias y covariancias Σ.

Alt [15] presenta un procedimiento para monitorear Σ que utiliza como estadístico a la variancia muestral generalizada

$$|\mathbf{S}| \tag{5}$$

la cual es el determinante de la matriz de variancias y covariancias muestrales. Para obtener los límites de control de este gráfico, se utiliza la media de |S|, es decir E(|S|), y la variancia de |S|, V(|S|) y la propiedad de que el 99,7% de los valores de |S| están contenidos en E(|S|) ± 3 √V(|S|). Por lo tanto, se puede demostrar que E(|S|)=b₁E(|Σ|) y V(|S|)=b₂E(|Σ|²) y

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i)$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right]$$

Entonces, los límites del gráfico de control para la variancia generalizada para Fase II son

$$LCS = (|\mathbf{S}| / b_1) (b_1 + 3b_2^{1/2}) \text{ y}$$

$$LCI = (|\mathbf{S}| / b_1) (b_1 - 3b_2^{1/2})$$

Una falencia de utilizar |S| como estadístico para el gráfico de control es que simplifica mucho el análisis multivariado ya que matrices de variancias y covariancias muy distintas pueden tener el mismo determinante. Esto puede impactar en el comportamiento del gráfico de control. Ante esta problemática, muchas veces se adicionan los gráficos univariados que monitorean la variabilidad.

Detección de las variables responsables de los puntos fuera de control

La dificultad que se deriva de utilizar gráficos multivariados es definir cuál o cuáles variables están ocasionando que un punto se encuentre fuera de los límites de control [16].

Los gráficos de control univariados no son recomendables para el análisis de los puntos fuera de control. En general, no detectan los puntos atípicos debido a que no tienen en cuenta las correlaciones entre las variables.

Análisis de componentes principales

Al producirse una observación multivariada fuera de control surge la problemática de encontrar la o las variables responsables del valor atípico multivariado. El análisis de componentes principales [17] sirve a este propósito permitiendo calcular la contribución de cada variable a una observación fuera de control [18].

Primero, se calculan las puntuaciones normalizadas de la forma

$$t_a / s_a \tag{6}$$

donde t_a es la puntuación de la componente principal (cp) a y s_a es el desvío estándar del autovector de la matriz S correspondiente a la cp a, que es igual a la raíz cuadrada del autovalor de dicha componente principal. Se seleccionan las cp con puntuaciones normalizadas mayores a 3 en valor absoluto.

Luego, se calcula la contribución de cada variable a cada una de las componentes principales seleccionadas a través de:

$$p_{a,j} \cdot (z_j - \mu_j) \tag{7}$$

donde p_{a,j} es el elemento j del autovector a de la matriz S.

Para cada componente principal se seleccionan las variables con mayores contribuciones pero que tengan el mismo signo que la puntuación y se calcula la contribución de la variable j a la puntuación normalizada del componente principal como:

$$cont_{a,j} = \frac{t_a}{s_a} \cdot p_{a,j} \cdot (z_j - \mu_j) \tag{8}$$

Finalmente, se suman las (8) calculadas para la variable j, obteniendo

$$CONT_j = \sum_a \frac{t_a}{s_a} \cdot p_{a,j} \cdot (z_j - \mu_j) \tag{9}$$

Se considera responsable de la observación multivariada fuera de control a la variable con mayor CONT_j [19].



APLICACIÓN

Los datos son adaptados del proceso cascada presentado en Montgomery [1]. Se mide una variable de salida (Y) y seis variables de entrada ($X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$). Se aplica la estrategia para estudiar la calidad de Y considerando las 6 variables que se cree que están relacionadas con la misma.

Identificación de las variables de entrada que influyen en la variable de salida

Primero, se estudia si todas las variables de entrada que se registran en un primer momento resultan críticas para la variable de salida. Suponiendo que es lógico expresar a Y como combinación lineal de las 6 variables de entrada se ajusta un modelo de regresión lineal múltiple (1) suponiendo (2). En base al valor p (Tabla 1) correspondiente a la prueba que evalúa si el coeficiente de regresión es igual a cero o no, se decide si la variable relacionada con ese coeficiente se considera crítica o no.

Tabla 1: Coeficiente de regresión estimado y valor p de un modelo de regresión de las variables de entrada.

Término	Coefficiente	Valor p
Constante	966,28	0,00
X_1	-1,06	0,88
X_2	-0,15	0,00
X_3	-0,14	0,00
X_4	-0,09	0,93
X_5	-1,01	0,62
X_6	2,36	0,04

En la Tabla 1 se observa que las variables de entrada estadísticamente significativas (valores $p \leq 0,05$) son X_2, X_3 y X_6 . Es decir, estas variables influyen sobre Y y se las puede considerar críticas.

Control de calidad de las variables de entrada críticas

El segundo paso es controlar la calidad de estas variables en forma conjunta teniendo en cuenta que están relacionadas. En una primera fase, se estudió si el proceso se encontraba estable apoyándose en los gráficos de control de T^2 y de la variancia generalizada. Una vez que el proceso estuvo bajo control se obtuvieron estimaciones del vector de medias y de la matriz de variancias y covariancias.

En la Tabla 2 se muestran las medias y desvíos de las variables de entrada consideradas críticas y en la Tabla 3 las correlaciones entre ellas obtenidas en la Fase 1.

Tabla 2: Media y desvío de X_2, X_3 y X_6 . Fase 1.

Variable	Media	Desvío
X_2	88,13	5,25
X_3	49,67	6,35
X_6	6,1	0,18

Tabla 3: Correlaciones entre X_2, X_3 y X_6 . Fase 1.

Variable	X_2	X_3	X_6
X_2	1	0,23	0,58
X_3		1	0,40
X_6			1

En una segunda fase para monitorear si el proceso sigue bajo control, se cuenta con 40 observaciones individuales. Se realizan gráficos de control multivariados para monitorear la media y la variancia de estas tres variables que están correlacionadas y que se supone que tienen una distribución normal multivariada como (3). En la Figura 1 se muestran el gráfico de control de T^2 y el de la variancia generalizada de X_2, X_3 y X_6 utilizando como estadísticas (4) y (5) respectivamente. Si bien el gráfico de la variancia generalizada no muestra puntos fuera de control, en el gráfico de T^2 se observan siete puntos por encima del LCS correspondientes a las observaciones 4, 5, 8, 9, 10, 18 y 32. En los gráficos de control multivariados cuando un punto sale fuera de control no se puede establecer a simple vista cuál/es son la/s variable/s responsables.

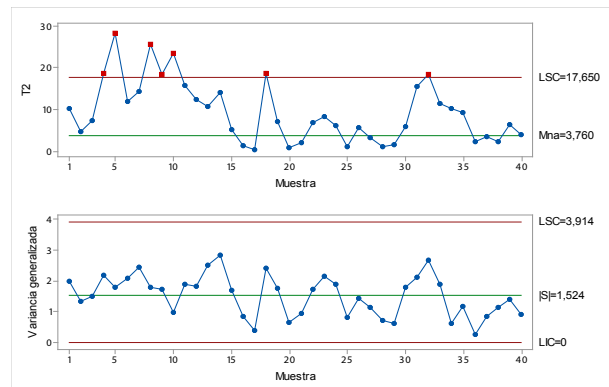


Figura 1: Gráficos de control T^2 y variancia generalizada de X_2, X_3 y X_6 . Fase 2.

Detección de las variables responsables de los puntos fuera de control

La bibliografía sobre el tema menciona varias alternativas que se pueden implementar a la hora de estudiar las causas de los puntos fuera de control. La más utilizada es acompañar a los gráficos

de control multivariados de gráficos de control univariados. En las Figuras 2, 3 y 4 se presentan los gráficos de control I-RM para las variables X_2 , X_3 y X_6 respectivamente.

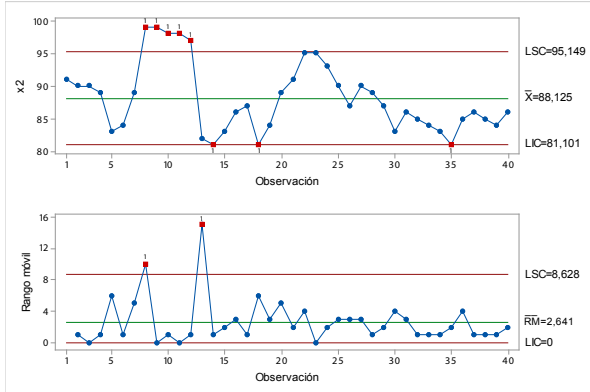


Figura 2: Gráficos de control I-RM de X_2 . Fase 2.

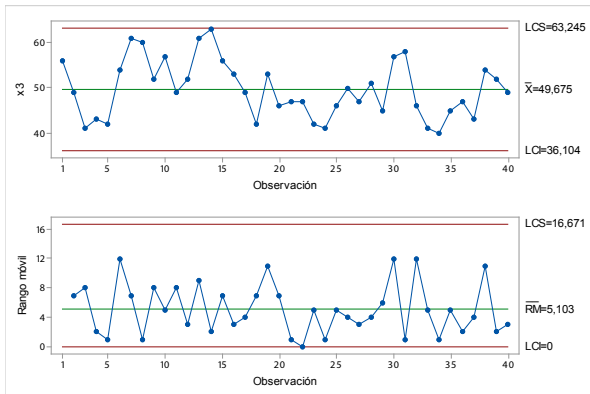


Figura 3: Gráficos de control I-RM de X_3 . Fase 2.

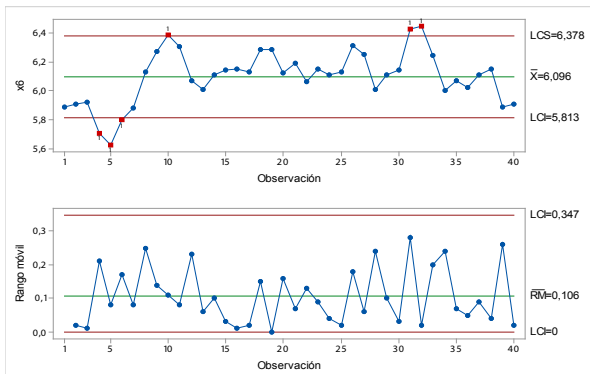


Figura 4: Gráficos de control I-RM de X_6 . Fase 2.

En los gráficos de control I de X_2 y de X_6 se observan puntos fuera de control y sólo en el gráfico de control RM de X_2 hay dos puntos sobre el LCS.

En la Tabla 4 se realiza un recuento de los puntos que están fuera de control en todos los gráficos presentados hasta el momento. En el gráfico T_2 las observaciones 4, 5, 10 y 32, y las observaciones 8, 9, 10 y 18 están fuera de control. Las primeras

cuatro también lo están en el gráfico I de X_6 , y las últimas cuatro tienen el mismo comportamiento en el gráfico I de X_2 . Observar que si bien los puntos 6, 11, 12, 13, 14, 31 y 35 no exceden el LCS, en el gráfico T_2 si lo hacen en alguno de los gráficos individuales de X_2 o X_6 .

Tabla 4: Observaciones fuera de control en los distintos gráficos de control.

Obs.	T^2	Variancia generalizada	X_2		X_3		X_6	
			I	RM	I	RM	I	RM
4	X						X	
5	X						X	
6							X	
8	X		X	X				
9	X		X					
10	X		X				X	
11			X					
12			X					
13				X				
14			X					
18	X		X					
31							X	
32	X						X	
35			X					

Otro enfoque interesante es estudiar para cada observación fuera de control en los gráficos multivariados la contribución de las variables consideradas utilizando el análisis de componentes principales. En la Tabla 5 están las contribuciones (9). Este análisis nos dice que la variable X_2 es la que más contribuye a las observaciones 5, 9, 18 y 32 y que la variable X_3 es la que más contribuye a las observaciones 4, 8 y 10.

Tabla 5: Contribución de las variables a las observaciones fuera de control.

Obs	X_2	X_3	X_6	$ cp_i > 3$	Variable responsable
4	-40,21	181,30	-2,04	cp1, cp3	X_3
5	35,77	26,23	-1,25	cp1, cp2	X_2
8	-124,00	313,76	-0,08	todas	X_3
9	279,34	-89,17	0,52	todas	X_2
10	-20,23	102,91	-1,19	todas	X_3
18	169,55	-58,88	0,21	todas	X_2
32	93,97	-36,16	-0,18	todas	X_2

Se puede notar que con los gráficos de control individuales no se arriba a las mismas conclusiones.

CONCLUSIONES

La estrategia comentada en este trabajo involucra técnicas estadísticas multivariadas que se pueden aplicar a procesos, ya sean industriales o de servicios. La misma consiste en pasos a seguir para organizar el control de calidad de variables de entrada que influyen en la variabilidad de la variable de interés o de salida de un producto.

Al haber múltiples variables involucradas en un proceso es necesario identificar cuáles influyen de manera significativa en la variable de salida (primer paso). Para esto se puede plantear un modelo estadístico donde la variable de salida es la variable respuesta y las variables de entradas son las variables explicativas. Si la primera es una variable cuantitativa y se puede expresar como combinación lineal de las otras, se ajusta un modelo de regresión lineal múltiple. Las variables de entrada que resultan estadísticamente significativas se consideran críticas. El seguimiento en forma conjunta de estas variables críticas es útil para controlar y monitorear que el proceso se encuentre bajo control (segundo paso). Existen diferentes gráficos de control multivariados dependiendo del tipo de variables, su distribución, si existe autocorrelación, si se quiere detectar pequeños cambios, entre otros. En el caso en que las variables sean continuas y tengan función de densidad normal multivariada y no estén correlacionadas se puede realizar el gráfico T^2 y variancia generalizada para la media y variancia respectivamente. Cuando el proceso está fuera de control es importante estudiar las causas para así poder actuar sobre las variables que están ocasionando problemas. El tercer paso se basa en el análisis de componentes principales para estudiar la contribución de cada variable cuantitativa crítica a los puntos fuera de control.

En la aplicación de la estrategia se muestra su implementación a un proceso cascada donde la variable de interés de un producto se cree que se relaciona con seis variables de entrada, todas cuantitativas. El ajuste de un modelo de regresión lineal múltiple permite identificar tres variables críticas, que son controladas conjuntamente (por estar correlacionadas) utilizando un gráfico de control T^2 y de variancia generalizada. Al presentarse puntos fuera de control se aplica el análisis de contribución de las variables dando como resultado que dos de las tres variables eran las responsables de que el proceso se encuentre fuera de control. Esto permite actuar específicamente sobre esas variables para alcanzar la calidad deseada del producto.

REFERENCIAS

- [1] Ryan, T. (2011). *Statistical for Quality Improvement*. 3rd Edition. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- [2] Yang, K.; Trewn, J. (2004) *Multivariate statistical methods in quality management*. McGraw-Hill, Inc. New York.
- [3] Santos-Fernandez, E. (2012) *Multivariate Statistical Quality Control Using R*. Springer. New York.
- [4] Montgomery, D. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control*. 7th Edition. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- [5] Kourti, T; MacGregor, J. (1996). *Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring*. *Journal of Quality Technology*, 28, 409-428.
- [6] Mohana Rao, R. et al (2013). *Application of multivariate control chart for improvement in quality of hotmetal - a case study*. *International Journal for Quality Research*, 7, 623-640.
- [7] Montgomery, D; Peck, E.; Vining, G. (2012) *Introduction to Linear Regression Analysis* 5th Edition. John Wiley & Sons, Inc. United States of America.
- [8] Kutner, M. et al. (2005) *Applied linear statistical model*. 5th Edition. McGraw-Hill, Inc. New York.
- [9] Prat Bartés, A. y otros. (1994) *Métodos Estadísticos. Control y Mejora de la Calidad*. 1ra. Edición. Ediciones UPC. Barcelona.
- [10] Allen, T. (2010) *Introduction to Engineering Statistics and Lean Sigma*. 2nd Edition. Springer. New York.
- [11] Lowry, C. A.; Montgomery, D. (1995). *A Review of Multivariate Control Charts*, *IIE Transactions*, Vol. 27(6), 800-810.
- [12] Hotelling, H. (1947). *Multivariate Quality Control. Techniques of Statistical Analysis*. McGraw-Hill, Inc. New York.
- [13] Woodall, J.; Sullivan, W. (1996). *A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations*. *Journal of Quality Technology*, 28, 398-408.
- [14] Tracy, N. D.; Young, J. C.; Mason, R. L. (1992). *Multivariate Control Charts for Individual Observations*. *Journal of Quality Technology*, 24, 88-95.
- [15] Alt, F. B. (1985). *Multivariate Quality Control*. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 6 Wiley & Sons. New York.
- [16] Fuchs, C.; Kenett, R. (1998) *Multivariate quality control. Theory and applications*. Marcel Dekker, INC. New York.
- [17] Jackson, J. E. (1991). *A User's Guide to Principal Components*. John Wiley & Sons. New York.
- [18] Murthy, K.; Kesava Rao, V. (2009). *Diagnosis and Control of Hot Metal Quality of Blast Furnace in an Integrated Steel Plant*. *International Journal of New Innovations in Engineering and Technology*, 12, 54-67.
- [19] Kourti, T.; MacGregor, J. (1996). *Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring*. *Journal of Quality Technology*, 28, 409-428.